

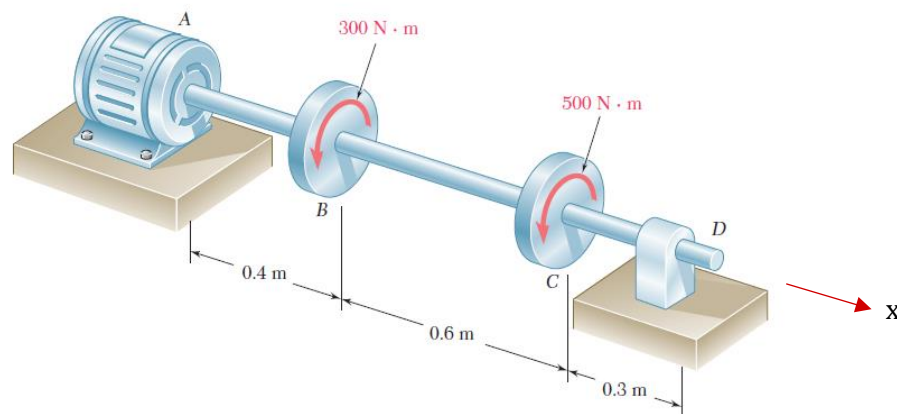
## Série 5b Questions

### Exercise 5b.1 – Power shaft

The electric motor in Figure 5b.1 exerts a torque of  $800 \text{ N}\cdot\text{m}$  at point A on the steel shaft ABCD when it is rotating at a constant speed. The point D of the shaft is free to rotate. Design specifications require that the diameter of the shaft be uniform from A to D and that the angle of twist between A and D not exceed  $1.5^\circ$ . Knowing that  $\tau_{max} \leq 60 \text{ MPa}$  and  $G = 77 \text{ GPa}$ .

**Determine the minimum diameter shaft that can be used.**

Hint: Consider both maximum stress and maximum twist criterion for this analysis.



**Figure 5b.1** | Power shaft system description.

#### *Texte en Français*

Le moteur électrique dans la Figure 5b.1 exerce un couple de  $800 \text{ N}\cdot\text{m}$  au point A sur l'arbre en acier ABCD lorsqu'il tourne à une vitesse constante. Le point D de l'arbre est libre de tourner. Les spécifications de conception exigent que le diamètre de l'arbre soit uniforme de A à D et que l'angle de torsion entre A et D ne dépasse pas  $1,5^\circ$ . On sait aussi que  $\tau_{max} \leq 60 \text{ MPa}$  et  $G = 77 \text{ GPa}$ .

**Déterminer le diamètre minimum de l'arbre pouvant être utilisé.**

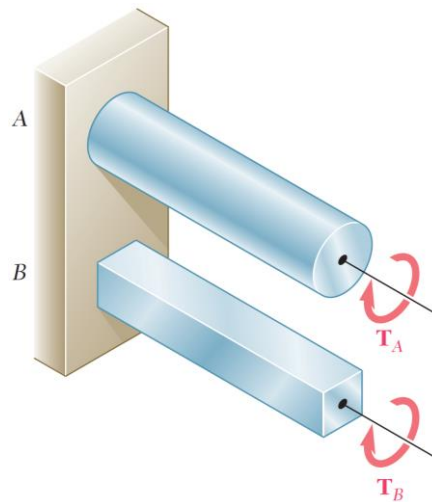
Astuce: Tenir compte à la fois du critère de la contrainte de cisaillement maximale et de l'angle de torsion maximal pour cette analyse.

### Exercise 5b.2 – Non-cylindrical bars

Shafts A and B in Figure 5b.2 are made of the same material and have the same cross-sectional area, but A has a circular cross section and B has a square cross section. Assume both deformations to be elastic.

- Determine the ratio of the maximum torques,  $T_A$  and  $T_B$ , that can be safely applied to A and B, respectively.
- Determine the ratio of the maximum values of the angles,  $\phi_A$  and  $\phi_B$ , through which shafts A and B, respectively, may be twisted.

Hint: For a square member,  $C_1 = 0.208$  and  $C_2 = 0.1406$



**Figure 5b.2** | Bars with the same cross-sectional area with (A) Circular and (B) Square cross-sections.

#### *Texte en Français*

Les arbres A et B dans la Figure 5b.2 sont fabriqués avec le même matériau et ont la même aire de section, mais A a une section transversale circulaire et B a une section transversale carrée. Nous supposons que toutes les déformations sont dans le domaine élastique.

- Déterminer le rapport des couples *maximaux*,  $T_A$  et  $T_B$ , pouvant être appliqués en toute sécurité les barres A et B.
- Déterminer le rapport entre les valeurs maximales des angles de torsion,  $\phi_A$  et  $\phi_B$ , auxquels les arbres A et B, respectivement, peuvent être tordus.

Indice: pour une barre carrée,  $C_1 = 0.208$  et  $C_2 = 0.1406$

### Exercise 5b.3 – From material to device

We want to integrate a new composite material in an inertial sensor combining accelerometer and gyroscope together. We consider a cylinder rod (radius  $r = 2 \mu\text{m}$ , length  $L = 4 \text{ mm}$ ) as the spin-axis of a gyroscope with a steel mass  $m = 8\pi \text{ mg}$  at its free end. A torque  $T_0 = 48\pi \mu\text{N} \cdot \mu\text{m}$  is applied at the interface between the steel mass and the end of the cylinder rod. The shear modulus is  $G = 40 \text{ GPa}$ .

The mass of the rod is neglected and the gravitation constant is  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- Give an expression and calculate the values for the normal stresses along  $x, y, z$  of the cylinder rod at point A.
- Give an expression and calculate the value of the maximum shear stress at point A due to the applied torque as a function of  $r$  and  $T_0$ .
- Give an expression for the torsion angle of the cylinder rod at point A of the bar and calculate its value.
- Calculate the maximum shear stress in the bar of the structure.

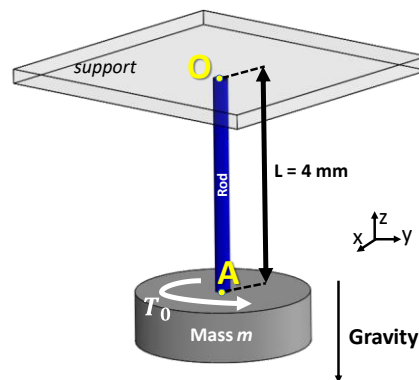


Figure 5b.3 | Inertial sensor combining accelerometer and gyroscope.

#### *Texte en Français*

Nous souhaitons intégrer un nouveau matériau composite dans un capteur inertielle combinant accéléromètre et gyroscope. Nous considérons une tige cylindrique (rayon  $r = 2 \mu\text{m}$ , longueur  $L = 4 \text{ mm}$ ) comme l'axe de rotation d'un gyroscope avec une masse d'acier  $m = 8\pi \text{ mg}$  à son extrémité libre. Un couple  $T_0 = 48\pi \mu\text{N} \cdot \mu\text{m}$  est appliqué à l'interface entre la masse d'acier et la tige cylindrique au point A. Le module de cisaillement est  $G = 40 \text{ GPa}$ .

La masse de la tige est négligée et la constante de gravitation est  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- Donner une expression et calculer les valeurs des contraintes normales le long des axes  $x, y, z$  dans la tige cylindrique au point A.
- Donner une expression et calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale au point A due au torque appliqué en fonction de  $r$  et  $T_0$ .
- Donner une expression pour l'angle de torsion de la tige cylindrique au point A et calculer sa valeur.
- Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans la barre de la structure.

### Exercise 5b.4 – MEMS Torque Magnetometer

A “Torque magnetometer” is a MEMS device used to measure the magnetic properties of a material with great sensitivity. These devices typically consist of a cantilever beam with a small amount of test material attached to the unclamped end. An external magnetic field is used to exert a torque on the sample, twisting the end of the beam. This deflection is then measured and, by repeating this with different conditions, the magnetic properties of the sample can be empirically determined with great precision.

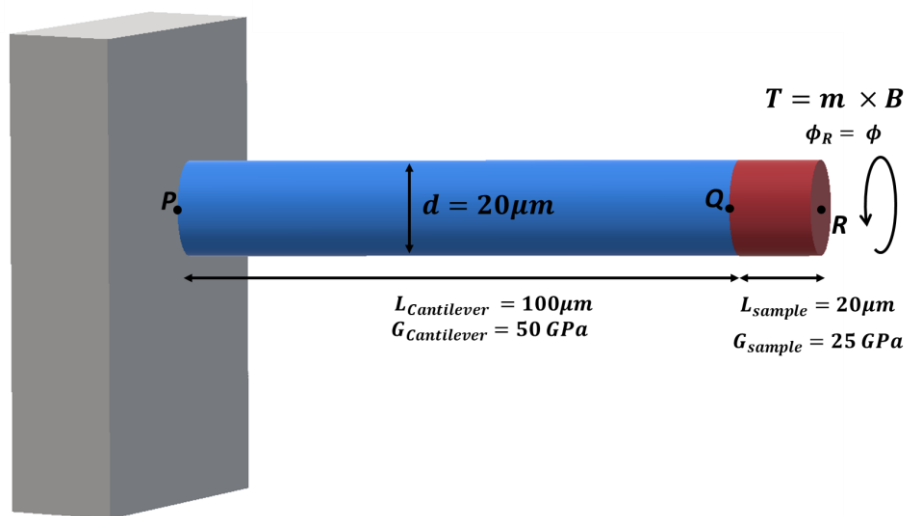
The magnetometer can be modelled simply with a cylindrical beam where the test material attached to the end as shown in Figure 5b.4. A uniform magnetic field is introduced to the sample with field strength  $\mathbf{B}$ , which we assume is applied at point R. We assume the two materials are firmly attached and have the same cross section. We also assume the beam material is completely non-magnetic with  $G_{cantilever} = 50 \text{ GPa}$ , while the shear modulus of the sample material is  $G_{sample} = 25 \text{ GPa}$ .

Recall that the magnetic torque on the beam is:

$$\mathbf{T}_{mag} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Where  $\mathbf{B}$  is the magnetic field and  $\mathbf{m}$  is the magnetic moment of the sample.

For a uniform magnetic field  $B = 20 \text{ T}$ , we measure a twist angle at the end of the sample of 2 degrees. **What is the magnetic moment of the sample?**



**Figure 5b.4** | Simplified model of a MEMS Torque Magnetometer as a cylinder.

**Texte en Français**

Un « magnétomètre torque » est un dispositif MEMS utilisé pour mesurer les propriétés magnétiques d'un matériau avec une grande sensibilité. Ces magnétomètres sont généralement constitués d'une barre avec une petite quantité du matériau à caractériser attachée à l'extrémité non fixée de la barre. Un champ magnétique externe est ensuite introduit, lequel exerce un couple sur l'échantillon, tordant l'extrémité de la barre. Cette déviation est ensuite mesurée et, en la répétant dans différentes conditions, les propriétés magnétiques du matériau en question peuvent être déterminées de manière empirique avec une grande précision.

Le fonctionnement de ces dispositifs peut être modélisé simplement en utilisant une poutre cylindrique où le matériau à caractériser est fixé à l'extrémité, comme illustré à la figure 5b.4. Un champ magnétique uniforme est introduit dans l'échantillon avec une intensité de champ  $\mathbf{B}$ , en supposant qu'il est appliqué au point R. Nous supposons que les deux matériaux sont fermement attachés et ont la même section transversale. Nous supposons également que le matériau de la barre est complètement non magnétique avec  $G_{cantilever} = 50$  GPa, tandis que le module de cisaillement du matériau de l'échantillon est  $G_{sample} = 25$  GPa.

Rappelons que le couple magnétique sur la barre est :

$$\mathbf{T}_{mag} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

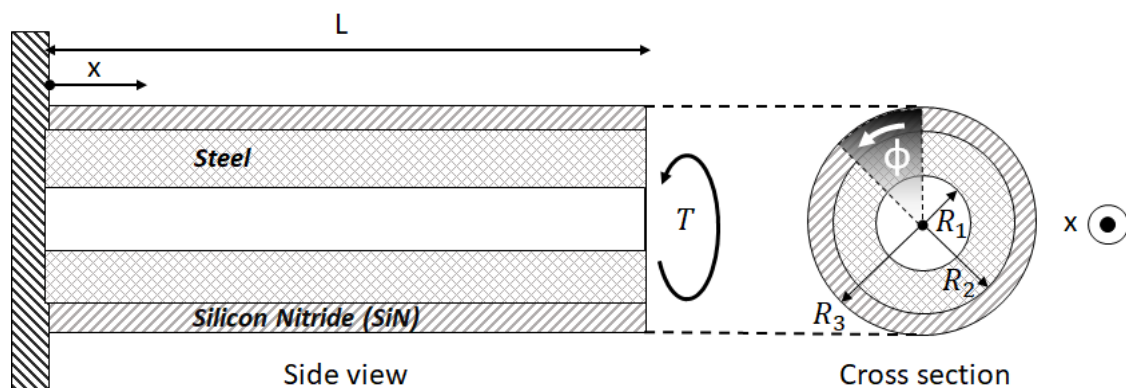
Où  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique et  $\mathbf{m}$  le moment magnétique de l'échantillon.

Pour un champ magnétique uniforme  $B = 20$  T, nous mesurons un angle de torsion de 2 degrés à l'extrémité de l'échantillon. **Quel est le moment magnétique de l'échantillon?**

### Exercise 5b.5 – Torsion of a coated tube

We consider a circular hollow tube coated with a hard material, as shown in Figure 5b.5. A Torque,  $T$ , is applied at its right end side at distance  $L$ . The tube is composed of a Silicon Nitride (SiN) coating and a Steel inner part. The material properties are: for the Silicon Nitride coating  $E_{SiN} = 175$  GPa and  $\nu_{SiN} = 0.25$ , and for the Steel part  $E_{Steel} = 208$  GPa and  $\nu_{Steel} = 0.30$ . The inner radius,  $R_1$ , is 0.03 m, the thickness of the Steel part ( $t_{Steel} = R_2 - R_1 = 90$  mm), the thickness of the Silicon Nitride coating ( $t_{SiN} = R_3 - R_2 = 2$  mm) and the length of the tube is  $L = 1$  m.

- Calculate the numerical value of the shear moduli for both parts (Steel and SiN).
- Calculate the numerical value of the polar moments of inertia for both parts (Steel and SiN).
- The yield shear stresses are  $\tau_{yield,Steel} = 220$  MPa and  $\tau_{yield,SiN} = 410$  MPa. With a safety factor ( $SF$ ) of 2, calculate the angle of twist,  $\phi$ , in radians (rad), for both materials. Indicate which part of the coated tube fails first.
- We want now to deform the whole tube with an angle of twist,  $\phi = 0.0275$  rad. Considering a safety factor ( $SF$ ) of 2, and that the inner radius,  $R_1$ , and SiN thickness remain the same:
  - Calculate the value of the new maximum thickness of the Steel tube before failure occurs.
  - For the new dimensions of the coated tube, plot the graph of torsional shear stress as function of the radius,  $r$ , for  $x = L$ . Indicate in your plot the stress values at the inner and outer edges of the Steel and SiN parts.



**Figure 5b.5** | Schematic of the coated tube (The drawing is not to scale).

**Texte en Français**

Nous considérons un tube creux circulaire recouvert d'un matériau dur, comme illustré à la figure 5b.5. Un couple,  $T$ , est appliqué à son extrémité droite à la distance  $L$ . Le tube est composé d'un revêtement en nitrure de silicium (SiN) et d'une partie interne en acier. Les propriétés des matériaux sont les suivantes: pour le revêtement de nitrure de silicium  $E_{SiN} = 175$  GPa et  $\nu_{SiN} = 0.25$ , et pour la pièce en acier  $E_{Steel} = 208$  GPa et  $\nu_{Steel} = 0.30$ . Le rayon intérieur,  $R_1$ , est de 0.03 m, l'épaisseur de la pièce en acier ( $t_{Steel} = R_2 - R_1 = 90$  mm), l'épaisseur du revêtement de nitrure de silicium ( $t_{SiN} = R_3 - R_2 = 2$  mm) et la longueur du tube est égale à  $L = 1$  m.

- a) Calculer la valeur numérique des modules de cisaillement pour les deux pièces (acier et SiN).
- b) Calculer la valeur numérique des moments quadratiques de torsion pour les deux pièces (acier et SiN).
- c) Les contraintes limites d'élasticité en cisaillement sont:  $\tau_{yield,Steel} = 220$  MPa et  $\tau_{yield,SiN} = 410$  MPa. Avec un facteur de sécurité ( $SF$ ) de 2, calculer l'angle de torsion,  $\phi$ , en radians (rad), pour les deux matériaux. Indiquer quelle partie du tube avec revêtement subira une défaillance en premier.
- d) Nous voulons maintenant déformer tout le tube avec un angle de torsion,  $\phi = 0.0275$  rad. Nous considérons un facteur de sécurité ( $SF$ ) de 2 et que le rayon interne,  $R_1$ , et l'épaisseur de nitrure de silicium restent les mêmes:
  - i. Calculer la valeur de la nouvelle épaisseur maximale du tube en acier avant défaillance.
  - ii. Pour les nouvelles dimensions du tube avec revêtement, tracer le graphique de la contrainte de cisaillement en torsion en fonction du rayon,  $r$ , pour  $x = L$ . Indiquer dans votre graphique les valeurs des contraintes sur les bords intérieur et extérieur des composants en acier et en SiN.